知识点

2022年2月9日 10:17

静电场中的导体和电介质.

一. 物体的电性质.

1. 物体的电性质.
2. 电场对电荷系统的作用.

外场(施力物体电场) $\vec{E}$, $\vec{F}=q\vec{E}$.

总电场(施力&受力) $\vec{E}_t=\vec{E}+\vec{E}_i$ (外+内), $\vec{E}=\vec{E}_t-\vec{E}_i$.

对体电荷、面电荷作为受力带电体, 只需减去 $\rho_e dV$、$\sigma_e dS$ 的电场.

二. 静电场中的导体

1. 导体达到静电平衡的条件.
2. 性质. 导体外侧表面 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

表面电荷密度 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{R_2}{R_1}$ (曲率半径).

3. 应用.
4. 高斯定理与库仑定律的验证.

三. 电容与电容器.

1. 孤立导体的电容. $C=\frac{Q}{U}$ $\xrightarrow{U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\text{ 球}}$ $4\pi\varepsilon_0 R$.
2. 电容器. 平行板 $C=\frac{Q}{U_{AB}}=\frac{\sigma_0 S}{\frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0}}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

同心导体球壳 ($\Phi=ES=\frac{Q}{\varepsilon_0}$, $E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $U=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$). $C=\frac{Q}{U_{AB}}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A}$.

同轴圆柱壳 ($U_{AB}=\int_A^B \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{R_B}{R_A}$) $C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln R_B-\ln R_A}$.

3. 连接. 串联 $\frac{1}{C}=\sum\frac{1}{C_i}$. 并联 $C=\sum C_i$.

四. 电介质.

静电场下极化 { 位移极化 / 取向极化

五. 极化强度矢量. $\vec{P}=\frac{\sum\vec{p}_{分子}}{\Delta V}$ (单位体积内电偶极矩矢量和).

1. $\vec{P}$ 与极化电荷的关系

分子 $\vec{p}_{分子}=q\vec{l}$, ΔV 内 n 个. $\vec{P}=nq\vec{l}$

以 S 为边界的体积 V 内的极化电荷 $Q'=-\oint \vec{P}\cdot d\vec{S}$ (表面小, 负试负)

极化电荷密度 ρ_e, $Q=\iiint_V \rho_e dV$. $\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \nabla\cdot\vec{P}dV=-\iiint_V \rho_e dV$, $\rho_e=-\nabla\cdot\vec{P}$

极化面电荷密度 $\sigma_e=-(\vec{P}_2-\vec{P}_1)\cdot\vec{n}$ (1指向2为正方向)

电介质极化后在介质内产生退极化场, $\vec{E}_总=\vec{E}_外+\vec{E}_退$

2. $\vec{P}$ 与电场 $\vec{E}$

① 同性电介质 $\vec{P}=\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$. χ_e 为极化率. $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 方向相同.
② 各向异性电介质. $P_i=\sum\chi_{eij}\varepsilon_0 E_j$, $i,j=x,y,z$. 线性介质 $\chi_{ij}=\chi_{ji}$.
③ 铁电体 电滞回线.
④ 压电体 机械形变 $\rightleftharpoons$ 极化.
⑤ 永电体/驻极体.

六. 电介质中静电场的基本定理.

1. 高斯定理. $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e dV$, 总电场 $\vec{E}=\vec{E}_外+\vec{E}_退$, 总电荷密度 $\rho_e=\rho_{自由}+\rho_{极化}$.

$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \rho_{e0}dV=Q_0$, 电位移矢量 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$

$\rho_e=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho_{e0}=\frac{1}{\varepsilon_r}\rho_{e0}$, 线性各向同性介质 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi_e\varepsilon_0\vec{E}$, $\varepsilon=(1+\chi_e)\varepsilon_0=\varepsilon_r\varepsilon_0$.

$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}=\frac{\rho_{e0}}{\varepsilon}$. (微分形式)

2. 环路定理. $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$, $\nabla\times\vec{E}=0$.

七. 边值关系和唯一性定理.

1. 电场强度

$0=\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}\approx\int_{L_1}+\int_{L_1'}=E_{1\parallel}L_1-E_{2\parallel}L_2$. $L_1=L_2\to 0$, $\vec{E}_{1\parallel}=\vec{E}_{2\parallel}$

不同电介质界面两侧切向电场相等(连续).

2. 电位移矢量

$\sigma_{e0}\Delta S=\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}\approx(D_{2\perp}-D_{1\perp})\Delta S$, 电介质界面 $\sigma_{e0}=0$ (无自由电荷), $D_{2\perp}=D_{1\perp}$

不同电介质界面两侧法向电位移矢量连续.

$(\vec{P}_1-\vec{P}_2)\cdot\vec{n}=\sigma_e'$, $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$. $(\vec{D}_1-\vec{D}_2)\cdot\vec{n}=0$, $(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\cdot\vec{n}=\frac{\sigma_e'}{\varepsilon_0}$.

$D_{2\perp}=D_{1\perp}$, $\varepsilon_1 E_{1\perp}=\varepsilon_2 E_{2\perp}$, $E_{1\parallel}=E_{2\parallel}$, $\frac{E_{1\perp}}{E_{1\parallel}}\cdot\frac{E_{2\parallel}}{E_{2\perp}}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}$.

3. 电势 $U_1-U_2=\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}=h(E_{n1}+E_{n2})=h(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})E_{n1}\to 0$ 介质面两侧电势连续.

4. 静电场唯一性

5. 应用举例. { 介质界面与电场线重合: $\vec{P}$ 在界面无法向分量. $\vec{E}=\alpha\vec{E}_0$, $\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum\iint_{S_i}\varepsilon_i\vec{E}_i\cdot d\vec{S}=Q_0$.
介质界面与等势面重合: $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$, $\vec{D}=\varepsilon_i\vec{E}_i$, 可求 $\vec{E}_i$.

面元 ΔS, $\Delta q=\sigma\Delta S$. 受静电场力 $\Delta\vec{F}=\vec{E}'(p)\sigma\Delta S$ (其他电荷对 Δq).

P 外一点 p_1, Gauss, $\vec{E}(p_1)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n=\vec{E}_{\Delta S}(p_1)+\vec{E}'(p_1)$ (ΔS 上和 Δq 对 p_1 的电场)

$\vec{E}_{\Delta S}(p_1)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$ (看作均匀无限大平面). $\therefore \vec{E}'(p_1)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$.

$\vec{E}'(p)=\vec{E}'(p_1)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$ (连续). $\therefore \Delta\vec{F}=\frac{\sigma^2\Delta S}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$.

五. 电介质中静电场基本定理.

1. 基本定理.

① 环路定理 $\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$ 成立.

介质内: $\nabla\times\vec{E}=0$.

交界面: $\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0$.

② 静电势

③ 高斯定理

$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}(Q_0+Q')$.

$Q'=-\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$, $\oint_S(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot d\vec{S}=Q_0$

定义电位移矢量 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$,

则有 $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_0$. 通量仅与自由电荷有关.

介质内: $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$

交界面: $\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_0$.

2. 电位移矢量 $\vec{D}$.

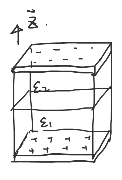
定义 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$.

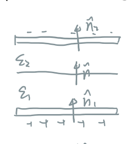
真空中: $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$. 点电荷: $\vec{D}=\frac{q}{4\pi r^2}\hat{r}$

线性各向同性介质中:

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi\varepsilon_0\vec{E}=(1+\chi)\varepsilon_0\vec{E}=\underset{相对}{\varepsilon_r}\varepsilon_0\vec{E}=\underset{绝对}{\varepsilon}\vec{E}$

例. 平行板电容器中充满相对介电常数 ε_1 和 ε_2 的介质, 极板上自由电荷密度 $\pm\sigma_0$, 求电容器内的 $\vec{D}$, $\vec{E}$ 与束缚电荷分布.





极板间各处 $\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sigma_0 S$.

$D\cdot S=\sigma_0 S$, $\vec{D}=\sigma_0\hat{z}$. 不变.

各段改变.

$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$, $\therefore \vec{E}_1=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_1\varepsilon_0}\hat{z}$, $\vec{E}_2=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_2\varepsilon_0}\hat{z}$.

$\vec{P}_1=\vec{D}_1-\varepsilon_0\vec{E}_1=(\sigma_0-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_1})\hat{z}$, $\vec{P}_2=(\sigma_0-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_2})\hat{z}$.

$\sigma_1=\hat{n}_1\cdot(-\vec{P}_1-0)=-(1-\frac{1}{\varepsilon_1})\sigma_0$

$\sigma_2=\hat{n}_2\cdot(0-(-\vec{P}_2))=(1-\frac{1}{\varepsilon_2})\sigma_0$.

$\sigma_{12}=\hat{n}\cdot((-\vec{P}_2)-(-\vec{P}_1))=(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1})\sigma_0$.

3. 简单介质电荷分布.

① 介质内部

线性均匀各向同性 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$.

总电荷 $\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}$

自由电荷 $\rho_0=\nabla\cdot\vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}=\varepsilon_r\rho$.

束缚电荷 $\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}=-\nabla\cdot(\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E})$

$=-\varepsilon_r\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}+\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}$

$=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}(1-\varepsilon_r)$

$=\rho(1-\varepsilon_r)=-\chi\rho=-\frac{\chi}{\varepsilon_0}\rho_0$.

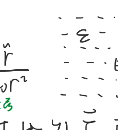
② 介质界面.

折射定律.

例.

③ 介质中的库仑定律.

$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=\underset{自由电荷}{\frac{Q_0\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}+\underset{极化电荷}{\frac{Q'\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$



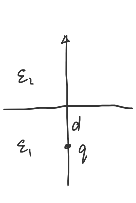
无穷远处极化电荷对此处 $\vec{E}$ 无贡献.

点电荷周围出现极化电荷.

$Q'=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})Q_0$, $Q=Q_0+Q'=\frac{Q_0}{\varepsilon_r}$.

$\vec{E}=\frac{Q_0\hat{r}}{4\pi\varepsilon r^2}=\frac{Q_0}{\varepsilon_r}\frac{\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$.

例. 两种相对介电常数为 ε_1、ε_2 的介质在空间内, 第一种介质距分界面 d 处有一点电荷 q, 求分界面极化电荷.



介质中 $D\cdot S=q$, $D=\frac{q}{4\pi r^2}$ 连续.

$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}$, $\vec{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$, $\vec{E}_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$.

$\sigma(\vec{r}_0)=\hat{z}((-\vec{P}_2)-(-\vec{P}_1))=\hat{z}\cdot(\vec{P}_1-\vec{P}_2)$

$=\varepsilon_0\hat{z}(\chi_1\vec{E}_1-\chi_2\vec{E}_2)$.

极化面电荷 σ' 与自由电荷 q 贡献电场.

$\hat{z}\cdot\vec{E}_1=\frac{q}{\varepsilon_1}\times\frac{d}{4\pi\varepsilon_0 r^3}-\frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$

$\hat{z}\cdot\vec{E}_2=\frac{q}{\varepsilon_2}\times\frac{d}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$.

又 $\sigma(\vec{r}_1)=\varepsilon_0\hat{z}\cdot(\chi_1\vec{E}_1-\chi_2\vec{E}_2)$,

得 $\sigma'=\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{qd}{2\pi r^3}$.

④ $\vec{D}$ 不一定满足环路定理.

无介质时: $\vec{E}_0$, $\vec{D}_0=\varepsilon_0\vec{E}_0$

有介质后: $\vec{E}$, $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$.

$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_0$ $\xRightarrow{不一定}$ $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$.

$\varepsilon_0\oint_S \vec{E}_0\cdot d\vec{S}=Q_0$

由 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 确定的电场 $\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}$.

不一定满足环路定理.

即 $\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=0$ 不一定成立.

成立情况

> 整个电场空间充满各向同性电介质, 使 $\oint_L\vec{D}\cdot d\vec{l}=\oint_L\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\cdot d\vec{l}=\varepsilon_0\varepsilon_r\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$.

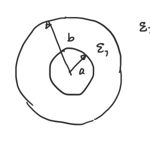
> 整个电场中若干种均匀电介质的分界面为等势面. 即介质界面与电场线垂直.

4. 介质分布特殊情况.

① 介质界面与电场线垂直.

$\vec{D}=\vec{D}_0=\varepsilon_0\vec{E}_0$, $\vec{E}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$.

例. 半径为 a 的导体球外有两种均匀介质 ε_1、ε_2



> 给定导体电量 Q

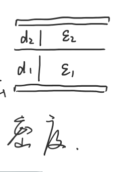
$D\cdot 4\pi r^2=Q$.

$\vec{E}_1=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_1}\vec{e}_r$. $\vec{E}_2=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_2}\vec{e}_r$.

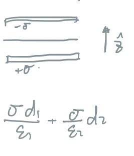
> 给定导体电势 V.

$V=-\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_2 b}+\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$.

例. 平行板电容器间填充介质 ε_1、ε_2, 上下极板间电压为 V, 求上极板自由面电荷密度.



$D\cdot S=\sigma S$, $\vec{D}=\sigma\hat{z}$.



$\vec{E}_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_1}\hat{z}$, $\vec{E}_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_2}\hat{z}$.

$V=V_1+V_2=\vec{E}_1\cdot\vec{d}_1+\vec{E}_2\cdot\vec{d}_2=\frac{\sigma d_1}{\varepsilon_1}+\frac{\sigma}{\varepsilon_2}d_2$

$\therefore \sigma=\frac{V}{\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}}$.

ε_1、ε_2 表示相对介电常数.

无介质时, 电场 $\vec{E}_0$.

添加介质, $\vec{E}_1=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_{r1}}$, $\vec{E}_2=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_{r2}}$ → 相对

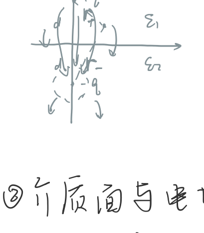
$V=E_1d_1+E_2d_2=\frac{E_0}{\varepsilon_{r1}}d_1+\frac{E_0}{\varepsilon_{r2}}d_2$

$=\frac{E_0}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}d_1+\frac{E_0}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}d_2=(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2})\varepsilon_0E_0$.

$E_0=\frac{V}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}}$, $E_1=\frac{V}{\varepsilon_{r1}(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}})}$, $E_2=\frac{V}{\varepsilon_{r2}(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}})}$

$\sigma_0=D=\varepsilon_0E_0$

例. 无限大平面 $z=0$ 将 ε_1 和 ε_2 两种电介质隔开, 在 z 轴上 $z=\pm d$ 处放置等量异号点电荷, 求空间电场分布.



$\vec{D}=\frac{q}{4\pi r_+^2}\hat{r}_+-\frac{q}{4\pi r_-^2}\hat{r}_-$

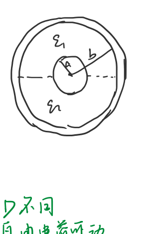
$\vec{r}_+=(x,y-d)$. $\vec{r}_-=(x,y+d)$

$\vec{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}(\frac{\hat{r}_+}{r_+^2}-\frac{\hat{r}_-}{r_-^2})$, $\vec{E}_2=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_2}$.

② 介质面与电场线重合.

电场线与介质界面重合, 所以介质界面上没有极化面电荷分布, 只有导体和介质的分界面上有.

例. 球形电容器带电量 Q_0, 极板间充满介电常数分别 ε_1 和 ε_2 的两种介质, 求各区域的电场和各界面的电荷.



$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=D\times 4\pi r^2=Q_0$, 两部分 D 不同 因为球面自由电荷可动.

$=D_1\cdot 2\pi r^2+D_2\times 2\pi r^2$

$=\varepsilon_1E\cdot 2\pi r^2+\varepsilon_2E\cdot 2\pi r^2=Q_0$

$\therefore \vec{E}=\frac{Q_0}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$ $\sigma_0=\frac{Q_0}{4\pi a^2}$

自由电荷 $\sigma_{1a}=D_{1a}=\frac{\varepsilon_1Q_0}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$.

$\sigma_{2a}=D_{2a}=\frac{\varepsilon_2Q_0}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$.

束缚电荷 $\sigma_1'=-P_{1a}=-(D_{1a}-E_a)=-\frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$

$\sigma_2'=-P_{2a}=-(D_{2a}-E_a)=-\frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$

且有总电荷分布 $\sigma_1=\sigma_{01}+\sigma_1'=\frac{2\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}=\sigma_2$