静电场中的导体和电介质

2022年3月10日 星期四　　上午9:50

一、物质的电性质.

0. 物质与电场.

物质中的静电场基本规律同真空.

物质中的微观电场不均匀.

宏观电磁学中指平均值.

1. 物质的导电性质.

电阻率 ρ. 电导率 $\sigma=\frac{1}{\rho}$.

2. 导体. 绝缘体. 半导体.

等离子体: 部分/完全电离的气体.

宏观上近似电中性.

物质聚集状态: 固. 液. 气. 离子.

超导体.

二、静电场中的导体.

(1) 1. 处于静电平衡的导体.

自由电子. 但不脱离金属.

脱离 → 逸出功.

2. 静电学中的导体

① 导体包含大量可自由移动的电荷.

大量: 元素多载流子.

可自由移动: 宏观定向运动.

定向漂移速度 $\vec{v}=\langle\vec{u}\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{u}_i$.

② 静电平衡状态

$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, 电荷分布恒定.

导体内场强为零, 导体是等势体.

③ 静电平衡时的电场分布.

导体内部场强为0. $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=0$.

导体外侧电场垂直表面.

(2) 静电平衡时的电荷分布.

1. 只存在表面, 内部体密度为0.

2. 表面电荷分布复杂.

与场源和导体形状有关.

① 形状 ⇒ 曲率影响电荷密度.

② 外部电荷影响.

Q 一感应出 q. $q<Q$.

3. 表面的电场

$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$. 与表面垂直.

4. 载流导体 → 稳恒电场(非静)

(3) 静电屏蔽: 导体空腔.

1. 腔内无电荷, 腔外不影响腔内.

空腔内电场为0, 电势为常数.

2. 腔内有电荷. 可影响腔外.

内表面感应出 $-q$.

外表面带上 $+q$

腔外电场受到影响.

接地空腔 ⇒ 不受腔外.

三、电容与电容器.

1. 导体电容

导体静电平衡状态.

带电为 Q, 电势为 φ.

带电为 kQ, 电势为 $k\varphi$. ⇒ $C=\frac{Q}{\varphi}$.

2. 电容器.

① 一个导体变会被另一导体包围.

静电感应 ⇒ 导体电势改变.

电容定义 $C=\frac{Q}{\Delta\varphi}=\frac{Q}{\varphi_a-\varphi_b}$.

Q: 两导体间导线连接后转移的电量.

电容数值取决于几何特性.

外极板不动. C 不依赖导体电荷.

② 平行板电容器.

$V=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d=\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$. $C=\frac{Q}{V}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

正比于极板面积 S, 反比于间距 d.

3. ① 带 Q_1, Q_2 的平行板电容器

电荷面密度 $\sigma_{1内}, \sigma_{1外}, \sigma_{2内}, \sigma_{2外}$.

取高斯面

$E\cdot S=0=\frac{(\sigma_{1内}+\sigma_{2内})S}{\varepsilon_0}$

$\sigma_{1内}=-\sigma_{2内}$.

不被内产生 $\vec{E}=0$.

$\sigma_{1外}-\sigma_{1内}-\sigma_{2内}-\sigma_{2外}=0$, $\sigma_{1外}=\sigma_{2外}$.

若用导线连接.

$Q_1'=Q_2'=\frac{Q_1+Q_2}{2}$

$\Delta Q_1=Q_1-Q_1'=\frac{Q_1-Q_2}{2}=\frac{[(\sigma_{1内}+\sigma_{1外})S-(\sigma_{2内}+\sigma_{2外})S]}{2}$

$=\frac{S}{2}[(\sigma_{1内}-\sigma_{2内})+(\sigma_{1外}-\sigma_{2外})]$

$=\frac{S}{2}\times 2\sigma_{1内}=q_{1内}=-q_{2内}$.

$C=\frac{\Delta q}{U_1-U_2}=\frac{q_{1内}}{\Delta U_1}$. 内部转移.

② 球形电容器.

$V=\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}=\varphi_a-\varphi_b=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$

$C=\frac{Q}{V_{ab}}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$.

$a<<b$ ⇒ 孤立导体球

$d=b-a<<a$ ⇒ 平行板电容器.

③ 圆柱形电容. 电荷为 Q.

取高斯面.

$\vec{E}\cdot 2\pi r\cdot L=\frac{Q}{\varepsilon_0}$. $E=\frac{Q}{L2\pi\varepsilon_0 r}$

$V=\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b\frac{1}{r}dr=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a}$.

$C=\frac{Q}{V}=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(\frac{b}{a})}$

4. 电容器在电路中

① 串联.

各极板上电荷相等.

总电压为各电容电压之和.

$V=\frac{Q_1}{C_1}+\cdots+\frac{Q_n}{C_n}=Q(\frac{1}{C_1}+\cdots+\frac{1}{C_n})=\frac{Q}{C}$

② 并联.

各电容电压相同.

总电量为各电量之和.

$Q=C_1V_1+\cdots+C_nV_n=(C_1+\cdots+C_n)V=CV$.

③ 混联

④ 例.

球壳电容半径 R_1, R_2, R_3.

将1和3用导线连接.

求连接后的电容.

若使中球带 Q, 求其内外表面电荷分布.

连接情况:

并联.

$C_1=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}}$. $C_2=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}}$. $C=C_1+C_2$.

并联. $V_1=V_2$. $\frac{Q_1}{C_1}=\frac{Q_2}{C_2}$. $Q_1+Q_2=Q$.

$Q_1=\frac{C_1}{C_1+C_2}Q$, $Q_2=\frac{C_2}{C_1+C_2}Q$.

例.

确定开关闭上后各电容器的带电量.

上极板带电 Q_1', Q_2', Q_3'.

电荷守恒. $Q_1'-Q_1'=Q_2'-Q_1$

$Q_3'-Q_2'=Q_3-Q_2$

环路定理. $V_1+V_2+V_3=0$.

$\therefore\frac{Q_1'}{C_1}+\frac{Q_2'}{C_2}+\frac{Q_3'}{C_3}=0$

例.

求各电容两端的电压.

环路定理 $\mathcal{E}+V_1+V_5=0$

$\mathcal{E}+V_1+V_2=0$

$V_1+V_3+V_4=0$

电荷守恒. $Q_2+Q_3=Q_1$

$Q_4+Q_6=Q_5$

$\therefore C_1V_1+C_2V_2=C_3V_3$　　$V_1=V_5$, $V_2=V_4$.

$C_4V_4+C_6V_6=C_5V_5$.　　V_3.

⑤ 格林例题定理.

$q_1\cdots q_n$, U_1-U_n.

$q_1'\cdots q_n'\to U_1'\cdots U_n'$.

则有 $\sum q_iU_i'=\sum q_i'U_i$.

$U_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$. $U_i'=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{q_j'}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$.

q_iU_i' 相乘, 求和等变换.

例.

求两极板感应电荷 Q_1, Q_2.

$Q_1\varphi_1'+Q_2\varphi_2'+Q\varphi'=Q_1'\varphi_1+Q_2'\varphi_2+Q'\varphi=Q'\varphi$.

⑥ 任意导体系统的电容. 电势.

三个任意导体系统 $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\to(Q_1,Q_2,Q_3)$

电容系数.
$$\begin{cases}Q_1=C_{11}\varphi_1+C_{12}\varphi_2+C_{13}\varphi_3\\Q_2=C_{21}\varphi_1+C_{22}\varphi_2+C_{23}\varphi_3\\Q_3=C_{31}\varphi_1+C_{32}\varphi_2+C_{33}\varphi_3\end{cases}$$

线性关系, 且 $C_{ij}=C_{ji}$.

电压系数. 与电容系数"互逆"

七、静电屏蔽.

$\Delta Q=Q_1-Q_1'=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{p_{11}+p_{12}-2p_{12}}$.

$C_{12}=\frac{\Delta Q}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{p_{11}+p_{12}-2p_{12}}$

四、电介质.

(1) 在电容器中加上绝缘介质

① 维持 Q. $C_0=\frac{Q_0}{V_0}\to C=\frac{Q_0}{V}>C_0$

增加 ε_r 倍.

维持 V. $C_0=\frac{Q_0}{V_0}\to C=\frac{Q}{V_0}$, $C>C_0$. $Q>Q_0$.

增加 ε_r 倍.

② 相对介电常数. ε_r

击穿场强 / 介电强度 V/m.

③ 分子中定义正负电荷的右自有效中心.

无极分子(中心重合) & 有极分子.

O_2. CCl_4　　HCl. H_2O. NH_3

无外电场时大量分子不显电性.

有外电场时

无极分子　正负电荷中心移动

产生电矩. 位移极化.

有极分子　电偶极矩沿电场排列.

取向极化.

④ 电场中的电介质

极化 → 介质内部使外场减小

(2) 极化强度.

1. 极化强度矢量

$\vec{P}=\frac{\sum\vec{p}_{分子}}{\Delta V}$ (单位体积内分子的矢量和)

单位 C/m^2, 与面电荷密度同. $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$

反映分子电偶极矩大小及有序程度.

2. 均匀电场中的电介质.

① 用 $\vec{P}(r)$ 描述内部的电荷分布.

⇒ 注意区域内的有效电荷.

"有效"指单个的+/-.

用此等效法将出现的电偶极矩.

⇒ 位于 dS、$|l\cos\theta|$ 的区域内的分子数.

$dQ'=nq_0dV=n_0q_0dS|l\cos\theta|$
$=-\vec{P}\cdot d\vec{S}$.

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 穿出, 留负电.

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 穿入, 留正电.

$Q'=-\oint\vec{P}\cdot d\vec{S}$, $\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}$

② 极化的体电荷只在非均匀处.

均匀处 极化电荷的面电荷密度.

③ 交界面上的面电荷密度.

取高斯面.

$\oint\vec{P}\cdot d\vec{S}=\vec{P}_1(a^2\vec{n})-\vec{P}_2(a^2\vec{n})+P_n dl\to 0$

$Q'=\sigma'\pi a^2+\rho'a^2h\to 0$

$\therefore\sigma'=-\vec{n}\cdot(\vec{P}_2-\vec{P}_1)=\vec{P}_{2\perp}-\vec{P}_{1\perp}$

介质 + 为真空, $\vec{P}_2=0$, $\vec{P}_1=\vec{P}$.

$\sigma'=\vec{n}\cdot\vec{P}=P_\perp$. $\vec{n}$ 指向介质外.

④

$\sigma'=P$　　$\sigma'=-P$　　$\sigma'=-P\cos\theta$.　　$\sigma'=-P$.

$S=\frac{S_0}{\cos\theta}$

⑤ 极化产生的电荷来源于束缚体.

电场随时间变化 → 极化电流.

极化均匀/不均匀, 都只有面电荷.

3. ① 电介质圆柱.

轴向均匀极化.

> 电荷分布:

均匀极化, $\vec{P}$ 常矢量.

$\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}=0$, 内部无净电荷.

边界 $\sigma_{侧}'=\vec{n}\cdot\vec{P}=0$.

$\sigma_{上}'=\hat{z}\cdot\vec{P}=P$, $\sigma_{下}'=-\hat{z}\cdot\vec{P}=-P$.

极化的 $\vec{E}'$ 相当于两个均匀带电圆柱产生的场.

> 外电场.

微分出的片-圆柱壳

$d\varphi=\int_{z_1}^{z_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R^2}=\frac{\rho dS}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R^2}$
$=\frac{\rho dS}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1})$,

两个上电荷 $\pm\rho dS'$ 的电势之和.

② 介质球

> 电荷分布:

介质内部无束缚电荷.

介质表面 $\sigma'=\vec{n}\cdot\vec{P}_\perp=P\cos\theta$.

方向球面极化电荷分布, 与球壳内也 $\vec{E}'$ 等效的电荷密度 $\sigma'=P\cos\theta$ 的球面.

> 退极化场:

$dQ_\theta=\sigma_\theta dS=P\cos\theta\, dS=PR\sin\theta\, R\cos\theta\, d\theta\, R\, d\varphi$.

$dE_z'=d\vec{E}'\cos(\pi-\theta)=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta\, d\varphi$

$E'=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=-\frac{P}{3\varepsilon_0}$.

③ 介质内部的宏观电场.

考虑柱内部.

外部等效为圆垂×2

外和内形成情况同(电场无穷)

$V=\varphi_a-\varphi_b=\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Pd}{\varepsilon_0}$.

$-\langle\vec{E}_{微观}\rangle\cdot\vec{d}=\frac{Pd}{\varepsilon_0}$, $\langle\vec{E}_{微观}\rangle=\vec{E}=-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$

4. 电介质的极化规律.

① 各向同性电介质

场强不太强, $\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}_0$.

χ 为介质的极化率.

均匀介质, 各处 χ 相同.

非均匀介质, χ 是位置的函数.

② 各向异性电介质

$\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 可不平行

$\vec{E}$ 不太强, $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 是线性关系.

极化张量. $P_i=\varepsilon_0\chi_{ij}E_j$.

$\vec{E}$ 强, 非线性介质.

③ 铁电体.

极化有滞后现象.

P 随外场非线性, 电滞回线.

χ 很大, 随 E 变化.

例.

球半径为 R, 极化率为 χ.

放在等量异号电荷导体板间.

求球内的场强.

① 刚放入电场, 极化电荷未形成,

球内 $E_1=E_r$, 使球极化.

$\vec{P}_0=\varepsilon_0\chi\vec{E}_r$, $\sigma_P=P_0\cos\theta$.

极化面电荷 $P_0\cos\theta$ 产生极化场

$E_{P1}=-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$.

即均匀极化的介质球在球内产生均匀电场 $\vec{E}_{P1}=-\frac{\chi}{3}\vec{E}_r$.

② 附加电场 E_{P1}, 引起进一步附加极化,

附加极化强度 $P_1=\varepsilon_0\chi E_{P1}=-\varepsilon_0\frac{\chi^2}{3}\vec{E}_r$.

设 P_1 产生电场 $\vec{E}_{P2}=(-\frac{\chi}{3})^2\vec{E}_r$.

⋮

$\vec{E}_{Pn}=(-\frac{\chi}{3})^n\vec{E}_0$.

$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}_{P1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{\chi}{3})^n\vec{E}_0=\frac{3}{3+\chi}\vec{E}_0$.

$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r+2}\vec{E}_0$.

均匀极化电介质球面电荷密度.

$\sigma'\to\vec{E}'$

$\vec{E}_c=\vec{E}_0+\vec{E}'$, $\vec{P}=-\varepsilon_0(\chi_e-1)\vec{E}_c$

$\sigma'=\vec{n}\cdot\vec{P}\cos\theta$.

$\sigma=P\cdot d\cos\theta$.

五、电介质中静电场基本定理.

1. 基本定理.

① 环路定理成立.

$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$. $\nabla\times\vec{E}=0$. $\vec{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=\vec{0}$.

② 高斯定理.

$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}(Q_0+Q')$,

$Q'=\oint-\vec{P}\cdot d\vec{S}$, 上 $\oint(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot d\vec{S}=Q_0$.

定义电位移矢量 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$.

则 $\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_0$, 通量只与 Q_0 有关.

∴ 各种介质内 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$.

交界面附近 $\hat{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma_0$, 法向.

$-\hat{n}\cdot(\vec{P}_2-\vec{P}_1)=\sigma'$

③ 关于 $\vec{D}$.

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$, 真空中 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$.

线性各向同性介质中,

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\chi\varepsilon_0\vec{E}=(1+\chi)\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$.

例.

极板上介质消失

极化后高斯面

$\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_0$. $PS=\sigma_0S$, $\therefore\vec{D}=\sigma_0\hat{z}$.

$\vec{E}_1=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_1}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\hat{z}$. $\vec{E}_2=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\hat{z}$.

$\therefore\vec{P}_1=\varepsilon_0(\varepsilon_1-1)\vec{E}_1=\frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1}\sigma_0\hat{z}$

$\vec{P}_2=\varepsilon_0(\varepsilon_2-1)\vec{E}_2=\frac{\varepsilon_2-1}{\varepsilon_2}\sigma_0\hat{z}$.

极化电荷只在表面.

$\sigma_1'=-\hat{z}\cdot\vec{P}_1=-\frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1}\sigma_0$

$\sigma_2'=-\hat{z}\cdot(\vec{P}_2-\vec{P}_1)=(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1})\sigma_0$

电位移线均匀, 电场线改变.

2. 简平行介质电荷分布.

① 内部.

线性. 均匀. 各向同性.

总电荷 $\rho=\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}$

自由电荷 $\rho_0=\nabla\cdot\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\nabla\cdot\vec{E}=\varepsilon_r\rho$.

束缚电荷 $\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}=-\chi\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\chi}{\varepsilon_r}\rho_0$.

② 界面: "折射定律".

电位移 $D_{1\perp}=D_{2\perp}$. $\varepsilon_1E_{1\perp}=\varepsilon_2E_{2\perp}$

电场 $E_{1\parallel}=E_{2\parallel}$. $\frac{D_{1\perp}}{\varepsilon_1}=\frac{D_{2\perp}}{\varepsilon_2}$.

$\therefore\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\frac{D_{1\perp}}{D_{1\parallel}}}{\frac{D_{2\perp}}{D_{2\parallel}}}=\frac{D_{1\parallel}}{D_{2\parallel}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$.

$\frac{D_1}{D_2}=\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$. $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$.

$\vec{D}$ 与 Q_0、Q' 均有关. $\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_0$.

例.

高斯定理: $\vec{D}=\begin{cases}\frac{Q_0r}{4\pi a^3} & r<a\\\frac{Q_0}{4\pi r^2} & r>a\end{cases}$

$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\begin{cases}\frac{Q_0\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1a^3} & r>a\\\frac{Q_0\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1r^3} & a<r<b\\\frac{Q_0\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2r^3} & r>b\end{cases}$

无介质的场

$\varphi=-\int_\infty^r\vec{E}\cdot d\vec{r}$. 积

极化电荷 $\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}=\chi\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}=(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\vec{D}$.

体电荷 $\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}=-(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\nabla\cdot\vec{D}=-(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1})\frac{3Q_0}{4\pi a^3}$

仅在球 $r<a$ 内.

面电荷 $\sigma_a'=-\hat{r}(\vec{P}_1-\vec{P}_2)$

$\sigma_b'=\hat{r}\cdot\vec{P}_2$

③ 介质中的库仑定律.

$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=\frac{Q_0\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0r^2}+\frac{Q'\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0r^2}$

自由电荷　极化电荷

无论远处极化电荷对其处 $\vec{E}$ 贡献如.

点电荷周围出现极化电荷.

$Q'=-(1-\frac{1}{\varepsilon_r})Q_0$, $Q=Q_0+Q'=\frac{Q_0}{\varepsilon_r}$.

$\vec{E}=\frac{Q_0\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{Q_0}{\varepsilon_r}\frac{\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$.

例. 两种相对介电常数为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的介质在空间内, 第一种介质泡分界面 d 处有一点电荷 q, 求分界面极化电荷.

介质中 $D\cdot S=q$, $D=\frac{q}{4\pi r^2}$ 连续.

$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}$, $\vec{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1r^2}$, $\vec{E}_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_2r^2}$.

$\sigma'(\vec{r}_2)=\hat{z}\cdot(-\vec{P}_2)-(-\vec{P}_1)=\hat{z}\cdot(\vec{P}_1-\vec{P}_2)$

$=\varepsilon_0\hat{z}(\chi_1\vec{E}_1-\chi_2\vec{E}_2)$.

极化面电荷 σ' 与自由电荷 q 到 z 的电场.

$\hat{z}\cdot\vec{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1r^2}\times\frac{d}{r}=\frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$

$\hat{z}\cdot\vec{E}_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_2r^2}\times\frac{d}{r}+\frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$.

又 $\sigma'(\vec{r}_2)=\varepsilon_0\hat{z}\cdot(\chi_1\vec{E}_1-\chi_2\vec{E}_2)$,

联立得 $\sigma'=\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{qd}{2\pi r^2}$.

④ $\vec{D}$ 不一定满足环路定理.

无介质时: $\vec{E}_0$, $\vec{D}_0=\varepsilon_0\vec{E}_0$.

有介质后: $\vec{E}$, $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$.

$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_0$ 不一定 ⟹ $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$.

$\varepsilon_0\oint_S\vec{E}_0\cdot d\vec{S}=Q_0$.

由 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 确定的电场 $\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}$.

不一定满足环路定理.

即 $\oint\vec{D}\cdot d\vec{l}=0$ 不一定成立.

成立情况

> 整个电场空间充满各向同性电介质,

使 $\oint\vec{D}\cdot d\vec{l}=\oint\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\cdot d\vec{l}=\varepsilon_0\varepsilon_r\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$.

> 整个电场中若干种均匀电介质的分界面为等势面.

即介质界面与电场线垂直.

4. 介质分布特殊情况.

① 介质界面与电场线垂直.

$\vec{D}=\vec{D}_0=\varepsilon_0\vec{E}_0$, $\vec{E}=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$.

例. 半径为 a 的导体球外有两种均匀介质 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

> 给定导体电荷 Q

$D\cdot 4\pi r^2=Q$.

$\vec{E}_1=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_1}\vec{e}_r$. $\vec{E}_2=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_2}\vec{e}_r$.

> 给定导体电势 V.

$V=-\int_\infty^r\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0b}+\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_1}(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})$.

例. 平行板电容器间填充介质 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 上下极板间电压为 V, 求上极板自由面电荷密度.

$D\cdot S=\sigma S$, $\vec{D}=\sigma\hat{z}$.

$\vec{E}_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_1}\hat{z}$, $\vec{E}_2=\frac{\sigma}{\varepsilon_2}\hat{z}$.

$V=V_1+V_2=\vec{E}_1\cdot\vec{d}_1+\vec{E}_2\cdot\vec{d}_2=\frac{\sigma d_1}{\varepsilon_1}+\frac{\sigma d_2}{\varepsilon_2}$

$\therefore\sigma=\frac{V}{\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}}$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 表示相对介电常数.

无介质时, 电场 $\vec{E}_0$.

添加介质, $\vec{E}_1=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_{r1}}$, $\vec{E}_2=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_{r2}}$ → 相对

$V=\vec{E}_1d_1+\vec{E}_2d_2=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_{r1}}d_1+\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_{r2}}d_2$

$=\frac{\vec{E}_0}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}d_1+\frac{\vec{E}_0}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}d_2=(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2})\varepsilon_0\vec{E}_0$.

$E_0=\frac{V}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}}$, $E_1=\frac{V}{\varepsilon_{r1}(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}})}$, $E_2=\frac{V}{\varepsilon_{r2}(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}})}$

$\sigma_0=D=\varepsilon_0\vec{E}_0$.

例. 无限大平面 $z=0$ 将 ε_1 和 ε_2 两种电介质隔开, 在 z 轴上 $z=\pm d$ 处放置等量异号点电荷, 求空间电场分布.

$\vec{D}=\frac{q}{4\pi r_+^2}\hat{r}_+-\frac{q}{4\pi r_-^2}\hat{r}_-$

$\vec{r}_+=(x,y-d)$. $\vec{r}_-=(x,y+d)$

$\vec{E}_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}(\frac{\hat{r}_+}{r_+^2}-\frac{\hat{r}_-}{r_-^2})$, $\vec{E}_2=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_2}$.

② 介质面与电场线重合.

电场线与介质界面重合, 所以介质界面上没有极化面电荷分布, 只有导体和介质的分界面上有.

例. 球形电容器带电量 Q_0, 极板间充满介电常数为别 ε_1 和 ε_2 的两种介质, 求各区域的电场和各界面的电荷.

$\oiint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=D\times 4\pi r^2=Q_0$, 两部分 D 不同 因为球面自由电荷可动.

$=D_1\times 2\pi r^2+D_2\times 2\pi r^2$?

$=\varepsilon_1E\cdot 2\pi r^2+\varepsilon_2E\cdot 2\pi r^2=Q_0$

$\therefore\vec{E}=\frac{Q_0}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$　　$\sigma_0=\frac{Q_0}{4\pi R^2}$

自由电荷 $\sigma_{1a}=D_{1a}=\frac{\varepsilon_1Q_0}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}$.

$\sigma_{2b}=D_{2b}=\frac{\varepsilon_2Q_0}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)c^2}$.

束缚电荷 $\sigma_1'=-P_{1a}=-(D_{1a}-E_a)=-\frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$

$\sigma_2'=-P_{2b}=-(D_{2b}-E_b)=-\frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$

且有总电荷分布 $\sigma_1=\sigma_0+\sigma_1'=\frac{2\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}=\sigma_2$