知识点

2022年6月2日 星期四 上午9:50

麦克斯韦电磁理论.

一. 麦克斯韦方程组.

1. 静电场 $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_0 = \iiint \rho_0 dV$, $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$. $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$, $\nabla\times\vec{E} = 0$. ⇒ 推广至变化电场.

静磁场 $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$, $\nabla\cdot\vec{B} = 0$. $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_0 = \iint_{S_c} \vec{j}_0\cdot d\vec{S}$, $\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0$.

电荷守恒 $\oint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S} + \frac{dq_0}{dt} = 0$, $\nabla\cdot\vec{j}_0 + \frac{\partial\rho_0}{\partial t} = 0$.

稳恒条件 $\oint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S} = 0$, $\nabla\cdot\vec{j}_0 = 0$. 洛仑兹力 $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$.

2. 涡旋电场假设：涡旋电场由变化磁场感生，并诱发感生电动势的非静电力.

$\varepsilon = \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_{S_c} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$. $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_{S_c} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$, $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

位移电流假设：非稳恒时，通过闭合曲面的电流 $I_0(t) \neq 0$.

$\vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_d$. $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_{S_c} (\vec{j}_0 + \vec{j}_d)\cdot d\vec{S}$. $\oint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{j}_d\cdot d\vec{S} = 0$.

又 $\oint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S} + \frac{dq_0}{dt} = \oint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S} + \oint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = 0$.

$\therefore \oint_S (\vec{j}_d - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S} = 0$. $\vec{j}_d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, $I_d = \iint_{S_c} \vec{j}_d\cdot d\vec{S} = \iint_{S_c} \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$.

$\Rightarrow \oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_{S_c} (\vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}$, $\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (非稳恒).

位移电流 $\vec{j}_d = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$, 电场和磁场相互激发.

3. 麦克斯韦方程组.

积分
$$\begin{cases} \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV \\ \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_{S_c} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_{S_c} (\vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S} \end{cases}$$

微分
$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

① 线性.

② 对 $\vec{D}$、$\vec{B}$ 与对 $\vec{E}$、$\vec{H}$ 不对称.

③ 不封闭, 引入介质性能.

如各向同性 $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{j}_0 = \sigma\vec{E}$.

导电介质在 $\vec{B}$ 中做匀速直线运动，速度为 $\vec{v}$ 且 $v \ll c$, 则 $\vec{j}_0 = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

导电介质静止，存在非电场力 $\vec{K}$, $\vec{j}_0 = \sigma(\vec{E} + \vec{K})$ 洛仑兹力 $\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$.

4. 边值关系：$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0$, $\vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$, $\vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$, $\vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_0$.

二、平面电磁波.

1. 电磁波产生机制.

机械波. 位移 u, 速度 v, 形变 σ.

$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial z}) = \frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{Y}{\rho}\frac{\partial\sigma}{\partial z}$.

形变、速度耦合, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, $a = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$.

电磁波. $\vec{B} = B(z,t)\vec{e}_y$, $\vec{E} = E(z,t)\vec{e}_x$.

$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial z}$, $\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial B}{\partial z}$.

$\therefore \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$, 为光速.

无限均匀各向同性介质中的电磁波, $\nabla\cdot\vec{E} = 0$, $\nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, $\nabla\cdot\vec{H} = 0$, $\nabla\times\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

$\because \nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$, $\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H}) = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$.

$\therefore \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{E}$, $\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{H}$.

2. 平面电磁波的性质.

位置矢量 $\vec{r}$. 波矢 $\vec{k}$ (方向为传播方向, 大小 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$). $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$, $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$\nabla = i\vec{k}$, $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$, 则 $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$, $\vec{k}\cdot\vec{H} = 0$. $\vec{k}\times\vec{E} = \mu\omega\vec{H}$, $\vec{k}\times\vec{H} = -\varepsilon\omega\vec{E}$. $\Rightarrow (\omega^2\varepsilon\mu - k^2)\vec{E} = 0$, $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, $\sqrt{\varepsilon}E_0 = \sqrt{\mu}H_0$.

① $\vec{k}\perp\vec{E}$, $\vec{k}\perp\vec{H}$, 电磁场强度与波传播方向垂直. 横波.

② $\vec{E}\perp\vec{H}$, $\vec{k}$、$\vec{E}$、$\vec{H}$ 右手正交.

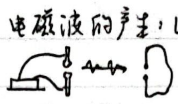
③ $\varepsilon E^2 = \mu H^2$, 振幅成比例, 电场、磁场能量密度相等.

④ 传播速度 $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}}c$, 真空光速的 $\sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}}$ 倍

折射率 $n = \frac{c}{v}$, 此处 $n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$. 电磁波色散.

3. 赫兹实验.

电磁波的产生：LC振荡电路 $\xrightarrow{\text{辐射}}$ 偶极振子. (开放, L.C小)



共振偶极振子. 产生火花 → 电磁波传播. 真空中 $v = c$.

4. 电磁波谱.

三、电磁场的能量、动量、角动量.

1. 电磁场的能量、动量、角动量

能量密度 $w = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$. 能流密度 $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$, 动量密度 $\vec{g} = \vec{D}\times\vec{B}$. 角动量密度 $\vec{l} = \vec{r}\times\vec{g}$.

体积V中, $W = \iiint_V w dV$. $\vec{G} = \iiint_V \vec{g} dV$, $\vec{L} = \iiint_V \vec{l} dV$. $\frac{d}{dt}(W + W_n) = -\oint_A \vec{S}\cdot d\vec{A} = 0$ (流入能量). $W + W_n$ = 常量.

同理. $\vec{G} + \vec{G}_n$ = 恒量, $\vec{L} + \vec{L}_n$ = 恒量. (带n为非电磁量). 守恒.

2. 平面电磁波的能量和动量.

$w = \varepsilon E^2 = \mu H^2$, $\vec{S} = w\vec{v}$, $\vec{g} = \frac{1}{v^2}\vec{S}$. 周期内平均值 $\bar{w} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2$, $\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2\vec{v}$, $\bar{\vec{g}} = \frac{1}{v^2}\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2v^2}\varepsilon E_0^2\vec{v}$.

对光, 有 $W = h\nu$, $\vec{p} = \frac{h}{2\pi}\vec{k}$. ν 为频率. $\vec{k}$ 为波矢. h 为普朗克常量.

3. 光压：光有动量. 反射系数 $R = \frac{S_反}{S_入}$, 全吸收, $\Delta S\cdot c\cdot\Delta t(g_入 + g_反) = c\cdot\Delta S\cdot\Delta t\frac{(S_入 + S_反)}{c^2} = \Delta S\cdot\Delta t(1+R)w$.

$p\Delta S\cdot\Delta t$ (冲量). 光压强 $p = (1+R)w$. 全反射, $R = 1$, $\bar{p} = 2\bar{w}$. 全吸收, $R = 0$, $\bar{p} = \bar{w}$.

4. 电磁场具有角动量的验证.  圆柱电容, 置于B中, 放电后旋转.

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

$= \varepsilon_0 c^2\vec{E}\times\vec{B}$

$= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

$-P = \oint \vec{S}\cdot d\vec{A}$

$S = w\vec{c}$

$\langle S\rangle = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 = \langle w\rangle c$

S → 功率面密度

$\frac{S}{c^2}$ → 动量体密度

$\frac{S}{c}$ → 力面密度, 能量体密度.