麦克斯韦电磁理论

2022年6月2日 星期四　　上午10:03

一、麦克斯韦方程组

1. 实验规律

库仑定律 ⇒ 高斯 $\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_i$

环路 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

安培定律 ⇒ 高斯 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

环路 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_i$

电磁感应：$\oint \vec{E}_{涡}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

电荷守恒：$\oint \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

2. 实验推广

$\vec{E} = \vec{E}_{静} + \vec{E}_{涡}$，$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$

$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_i$

$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint \vec{j}\cdot d\vec{S}$，边变时不同曲面 $\vec{j}\cdot d\vec{S}$ 不同。

改写：$\oint \vec{j}_0\cdot d\vec{S} = -\frac{dq_c}{dt}$，且有 $\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_c$

$\therefore \oint \vec{j}_0\cdot d\vec{S} = -\oint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$，$\oint \vec{j}_0 - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = 0$

即 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint \vec{j}\cdot d\vec{S}$

3. 位移电流

若无自由电荷和传导电流，则有

$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0\varepsilon_r \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

$\Rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint \mu_0 \vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}$

记 $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 位移电流密度

$I_d = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{d\Phi_D}{dt}$ 位移电流

例. 无限长直螺线管横截面半径为R，单位长度的匝数为n，当导线中通有交流电 $I = I_0 \sin\omega t$ 时，求管内外的位移电流密度。

电场强度 $E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d(\mu_0 n I_0 \sin\omega t \cdot \pi R^2)}{dt}$

位移电流密度 $j = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E_r}{\partial t}$

例. 研究平行板电容器在充放电过程中磁场与传导电流、位移电流的关系。

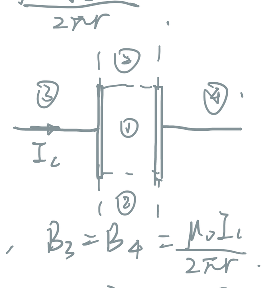
$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\pi R^2 \varepsilon_0}$

$j_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{\pi R^2}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\pi R^2} I_c$ → 传导

$I_D = \pi a^2 j_D = I_c$

$B = \frac{\mu_0 I_总}{2\pi r} = \frac{\mu_0 (I_c + I_D)}{2\pi r}$

分区域：



③、④，$I_D = 0$，$B_3 = B_4 = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r}$

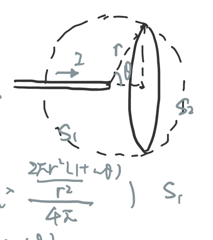
②，$I_c = 0$，$B_2 = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r}$

①，$I_c = 0$，$B_1 = \frac{\mu_0 \pi r^2 j_D}{2\pi r} = \frac{I_c}{2\pi R^2} r$

4. 似稳条件下位移电流不激发B。

例. 通有缓变电流的半无限导线。

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$



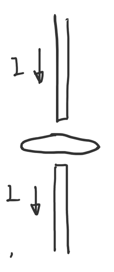
$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j}\cdot d\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

$B\cdot 2\pi r\sin\theta = \begin{cases} \mu_0 I + (-\mu_0\varepsilon_0 \frac{dQ}{dt}\times\frac{4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\times\frac{2\pi r^2(1+\cos\theta)}{4\pi}) & S_1 \\ 0 + (\mu_0\varepsilon_0 \frac{dQ}{dt}\cdot\frac{2\pi r^2(1-\cos\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}) & S_2 \end{cases}$

$= \begin{cases} \mu_0 I - \mu_0 I \frac{1+\cos\theta}{2} & S_1 \\ 0 + \mu_0 I \frac{1-\cos\theta}{2} & S_2 \end{cases}$

$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\varphi}$

例. 细直导线中间截去长度为l的小段，导线中通有低频交流电 $I(t)$，取圆形环路无传导电流通过，视计算位移电流。



导线两个端点的电荷量 $\pm q$。

产生电场 $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{[r^2 + (\frac{l}{2})^2]^{3/2}}$

$\Phi_D = \varepsilon_0 \int_0^R 2\pi r E dr = q[1 - \frac{1}{\sqrt{(\frac{2R}{l})^2+1}}]$

$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dq}{dt}[1 - \frac{1}{\sqrt{(\frac{2R}{l})^2+1}}] = I[1 - \frac{1}{\sqrt{(\frac{2R}{l})^2+1}}]$

$B = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi R} = \ldots$

5. 麦克斯韦方程组

$\begin{cases} \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0 \\ \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} \end{cases}$

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$

$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\nabla\cdot\vec{B} = 0$

$\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

本构方程 $\begin{cases} \vec{B} = \mu_0\mu_r \vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r \vec{E} \\ \vec{j}_0 = \sigma\vec{E} \end{cases}$

边界条件 $\begin{cases} \vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0 \\ \vec{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_0 \end{cases}$

二、平面电磁波

1. 自由空间中

Maxwell方程组 $\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$ $\vec{E} \xrightarrow{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \vec{B} \xrightarrow{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \vec{E}$

解耦合：$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\nabla\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$= -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0 \nabla\times\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$= \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

$\therefore \begin{cases} \underset{\text{矢量加}}{\nabla(\nabla\cdot\vec{E})} - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \underset{\text{拉方程}}{\nabla(\nabla\cdot\vec{B})} - \nabla^2\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{cases}$

即 $\begin{cases} \nabla^2\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{cases}$ 电磁波动方程. 记 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

2.

$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$，$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

$\therefore \vec{E}(x, t) = \vec{f}(x \pm ct)$（一维情况求解）

多向传、波动

标量记实。

3. 单色平面波

① $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \xRightarrow{\text{取实部}} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ 　　$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

单色：单频率。

平面：等相位面 $\phi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$ 与k垂直。

② 基本要素。

振幅 $\vec{E}_0$、$\vec{B}_0$。

角频率 ω。　时间周期性。

波矢量 $\vec{k}$。　空间周期性。

大小为波数，

方向为波传播方向。

相速度 $v_p = \frac{\omega}{k}\hat{k}$。

③ 性质。

Gauss $\nabla\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E} = 0$

电场与传播方向垂直。

磁无源 $\nabla\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{B} = 0$

磁场与传播方向垂直。

Faraday. $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$

E.B.k 右手螺旋. $B = \frac{kE}{\omega}$

A.M. $\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = (\frac{\omega}{k})^2 \vec{E}$.

相速度 $v_p = \frac{\omega}{k} = c$.

振幅关系 $E = cB$，$\varepsilon E^2 = \mu H^2$.

4. 电磁辐射与天线。

5. 无限均匀介质中。

$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$

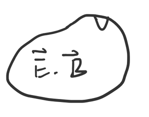
一般介质具有色散性质：介质对电磁场的影响与电磁波频率有关。

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$，折射率 $n = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$.

6. 导体中。

三、电磁场的能量与动量。

1. 电磁场的能量。

①  V内有 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$.

能量密度 $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$

$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E^2 + c^2B^2)$.

$W = \int w dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (E^2 + c^2B^2) dV$.

② 能量随时间变化. $\frac{dW}{dt} = \varepsilon_0 \int \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + c^2\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV$.

真空中 $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$，$\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

$\therefore \frac{dW}{dt} = \varepsilon_0 c^2 \int \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) - \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) dV$

$= -\varepsilon_0 c^2 \int \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) dV = -\int \nabla\cdot\vec{S} dV$.

③ 坡印亭矢量 $\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$.

$\frac{dW}{dt} = -\int \nabla\cdot\vec{S} dV = -\oint \vec{S}\cdot d\vec{a}$.

区域V内电磁场能量随时间减少的速率 = 单位区域边界面的坡印亭矢量通量.

$\vec{S}$ 指向电场能量流动的方向.

$\vec{S}\cdot d\vec{a}$ 单过 $d\vec{a}$ 的功率.

2. 电磁波的能量.

① 单色平面波.

$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$，$\vec{B} = B_0 \cos(kz - \omega t)\hat{y}$.

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)\hat{k}$.

$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (E^2 + c^2B^2) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t)$.

能流密度 $\vec{S} = w\vec{c} = wc\hat{k}$.

平均能流密度 $\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2 \hat{k} = \langle w\rangle c\hat{k}$.

强度 $I = |\langle\vec{S}\rangle| = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2$

例. 将台灯视为电磁辐射的点源，到桌面距离为30cm，电能→光的效率为5%，估算台灯(60W)照于桌面上的光的电磁场的振幅。

P=60W.

距离点源r处的电磁波强度

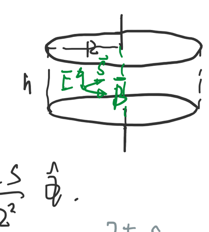
$I = \frac{\langle P\rangle}{4\pi r^2}$ 球面模型

$= c\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$.

$\therefore E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 c\langle P\rangle}{2\pi r^2}} = \sqrt{\frac{(4\pi\times10^{-7})\times(3\times10^8)\times(60\times5\%)}{2\pi(0.3)^2}} = 45\ V/m$.

$B_0 = \frac{E_0}{c} = 1.5\times10^{-7}\ T$.

② 电容器充电



设 $Q = It$.

$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z} = \frac{It}{\pi R^2\varepsilon_0}\hat{z}$，$\vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi R^2}\hat{\phi}$.

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = -\frac{I^2 s t}{2\pi^2\varepsilon_0 R^4}\hat{s}$.

$w = \frac{I^2t^2}{2\pi^2\varepsilon_0 R^4} + \frac{\mu_0 I^2 s^2}{8\pi^2 R^4}$

$D = \frac{It}{\pi R^2}\hat{z}$.

$j_D = \frac{I}{\pi R^2}$

$B = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\times\frac{1}{2\pi s}\times\pi s^2$

$= \mu_0 \frac{Is}{2\pi R^2}$.

单位时间流入侧面能量 $(s = R)$

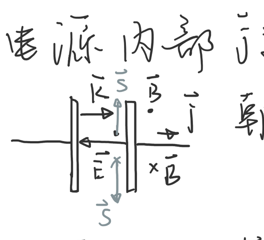
$-\oint \vec{S}\cdot d\vec{a} = S(R)\cdot 2\pi R h = \frac{I^2 h t}{\pi\varepsilon_0 R^2}$.

单位时间能量增加

$\frac{dW}{dt} = \frac{dw_e}{dt}\cdot\pi R^2 h = \frac{I^2 h t}{\pi\varepsilon_0 R^2}$

③ 电路中能量输运.

电源内部 $\vec{j}$ 与 $\vec{K}$ 同向，与 $\vec{E}$ 反向.



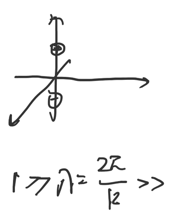
朝外部空间输出能量.

电源外部，$\vec{E}$ 有与 $\vec{j}$ 同向的分量.

$\vec{S}$ 指向导线内.

④ 电偶极辐射

沿z轴振荡



$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\sin\theta \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}\hat{\theta} \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\sin\theta \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}\hat{\varphi} \end{cases}$

$r \gg \lambda = \frac{2\pi}{k} \gg l$.

辐射沿径向传播.

$\vec{S} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^2}{16\pi^2 c}\sin^2\theta \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2}$

单位时间从球面流出的能量

$-\frac{d\langle W\rangle}{dt} = \oint \langle\vec{S}\rangle\cdot d\vec{a}$

$= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\oint \frac{\sin^2\theta}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}R^2\sin\theta d\theta d\varphi$

$= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$.

功率与r无关，正比于 ω^4.

⑤ 电磁场能量守恒.

功率密度 $\vec{f}\cdot\vec{v} = (\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})\cdot\vec{v} = \rho\vec{E}\cdot\vec{v} = \vec{E}\cdot\vec{j}$.

流出 $\oint\langle\vec{S}\rangle\cdot d\vec{a}$. 做功 $\iiint \vec{E}\cdot\vec{j} dV$ → 能量减少

3. 电磁场的动量.

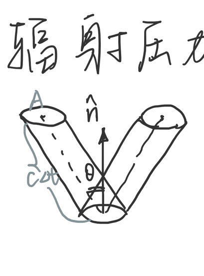
① 粒子能量 $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$，动量 $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$，$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2}$. 光速 ⇒ $p = \frac{E}{c}$.

电磁场动量密度. $\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B}$.

角动量密度. $\vec{l} = \vec{r}\times\vec{g}$.

② 辐射压力 — 光压.



$\hat{n}\cdot(\vec{g}_R - \vec{g}_A)\Delta V$

$= Ac\Delta t\cos\theta(\frac{S_A}{c^2} + \frac{S_R}{c^2})\cos\theta$

$= \frac{2\langle S\rangle}{c}A\Delta t\cos^2\theta$.

压强 $p = \frac{F}{S} = \frac{\frac{\Delta p}{\Delta t}}{A} = \frac{2\langle S\rangle}{c}\cos^2\theta = 2\langle w\rangle\cos^2\theta$

例. 激光笔的光压. 激光笔功率3mW，照射到屏幕上光斑直径为2mm，屏幕反射系数70%，求屏幕所受光压.

$\langle S\rangle = \frac{\langle P_总\rangle}{\pi R^2} = \frac{3\times10^{-3}}{\pi\times(0.001)^2} = 955\ W/m^2$

$P = (1 + 0.7)\frac{\langle S\rangle}{c} = 5.4\times10^{-6}\ N/m^2$

例. 太阳光对地球的光压. 垂直照射，每分钟射到地面每平方厘米上的能量为1.94cal（1cal = 4.1868J）. 求：

(1) 地面上太阳光的E、H的振幅.

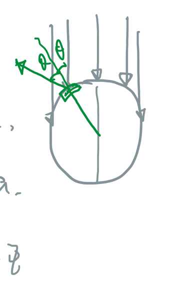
(2) 太阳光作用在整个地球上的力.

能流密度 $\langle S\rangle = \frac{W}{\Delta t S} = \frac{1.94\times4.1868}{60\times(0.01)^2} = 1.35\times10^3\ W/m^2$

能量密度 $\langle w\rangle = \frac{\langle S\rangle}{c} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$.

$\therefore E = \sqrt{\frac{2\langle S\rangle}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2\times1354}{(3\times10^8)\times(8.85\times10^{-12})}} = 1.01\times10^3\ V/m$

$H = \frac{E_0}{\mu_0 c} = 2.68\ A/m$.



作用在面元da上的力的分量，

$dF_z = (p\,da)\cos\theta = \frac{2\langle S\rangle}{c}\cos^3\theta\,da$.

合力 $F_z = \frac{2\langle S\rangle}{c}R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$

$= \frac{\langle S\rangle}{c}\pi R^2 = 5.8\times10^8\ N$.